4^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

31.

Έστω A , B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου .

Αν $P(A') \leq 0{,}28$ και $P(B') \leq 0{,}71$ δείξτε ότι

i) $P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B)$

ii) Το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το κενό.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έχουμε

$P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B) \quad \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 1{,}01 - P(A \cup B) \quad \Leftrightarrow$

$P(A) + P(B) \geq 1{,}01 \quad \Leftrightarrow$

$1 - P(A') + 1 - P(B') \geq 1{,}01$

$P(A') + P(B') \leq 0{,}99$

η οποία είναι προφανής αφού προκύπτει με πρόσθεση των υποθέσεων κατά μέλη .

ii)

Έστω ότι $A \cap B = \varnothing$ τότε $P(A \cap B) = 0$

το πρώτο ερώτημα που αποδείξαμε δίνει

$0 \geq 1{,}01 - P(A \cup B) \quad \Leftrightarrow$

$P(A \cup B) \geq 1{,}01$

πράγμα άτοπο

Άρα $A \cap B \neq \varnothing$.

32 .

Να υπολογιστούν

i) Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 4 που είναι μεταξύ του 198 και του 725

ii) Το άθροισμα των περιττών αριθμών που είναι μεταξύ του 200 και του 800

iii) Το άθροισμα όλων των αρτίων από το100 μέχρι και το 400

Προτεινόμενη λύση

i)

Το πρώτο πολλαπλάσιο του 4 που είναι μεγαλύτερο του 198 είναι το 200 και το αμέσως μικρότερο του 725 είναι το 724

θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα

200 + 204 + 208 +…+ 724

το οποίο είναι άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου με $α_1 = 200$, $ω = 4$.

Αν το πλήθος των όρων είναι ν τότε

$α_ν = 724 \Leftrightarrow α_1 + (ν-1)ω = 724 \Leftrightarrow$

$200 + (ν-1)\cdot 4 = 724 \Leftrightarrow$

$ν = 132$ οπότε

$$S_{132} = \frac{[2α_1 + 131ω]\cdot 132}{2} =$$

$$= \frac{(400 + 131\cdot 4)\cdot 132}{2} = 60984$$

ii)

Ο πρώτος περιττός μεγαλύτερος του 200 είναι ο 201 και ο αμέσως μικρότερος του 800 ο 799 , άρα

πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα

201 + 203 + 205 +…+ 799

Δουλεύοντας όπως πριν βρίσκουμε ν = 300 και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά

iii)

Ζητάμε το άθροισμα

100 + 102 + 104 +…+ 400

ομοίως βρίσκουμε ν =151 κλπ.

33.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - kx + 4$ και $g(x) = 2x - 6$

i) Αν $f(2) = -2$, να βρείτε την τιμή του k

ii) Για $k = 5$

α) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι ψηλότερα από την C_g

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $f(2-\sqrt{2}) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f(2) = -2 \Leftrightarrow 8 - 2k = -2 \Leftrightarrow k = 5$

ii)

Για $k = 5$ είναι $f(x) = x^2 - 5x + 4$

α) Τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ οπότε

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ με ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = 5$

$g(2) = f(2) = -2$ και $g(5) = f(5) = 4$ τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων είναι τα $(2, -2)$ και $(5, 4)$

β) Θα πρέπει να ισχύει $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 > 0$

το πρόσημο του τριώνυμου $x^2 - 7x + 10$ φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$ 2 5 $+\infty$
Πρόσημο $x^2 - 7x + 10$	+ 0 − 0 +

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η C_f είναι ψηλότερα από την C_g όταν

$x < 2$ ή $x > 5$

γ) $f(2-\sqrt{2}) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 - 5(2-\sqrt{2}) + 4 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 6\right) =$

$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 10 + 5\sqrt{2} + 4 - \frac{2\sqrt{2}}{2} + 6 = 6$$

34 .

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $d(2x, 5) = d(x, -6)$

ii) $|x^2 + x + 1| + |2x^2 + 3| - 6 = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$d(2x, 5) = d(x, -6) \Leftrightarrow |2x-5| = |x+6| \Leftrightarrow$

$$(2x-5 = x+6 \text{ ή } 2x-5 = -x-6) \Leftrightarrow x = 11 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

ii)

Επειδή το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$ θα είναι

$x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$ επίσης

$2x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $|2x^2 + 3| = 2x^2 + 3$

επομένως η εξίσωση γίνεται

$$x^2 + x + 1 + 2x^2 + 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = \frac{2}{3}$$

35.

Έχουμε 9999 όμοια αντικείμενα τα οποία θέλουμε να συσκευάσουμε σε δέματα έτσι ώστε :

Το πρώτο δέμα να περιέχει 3 αντικείμενα , το δεύτερο 5 , το τρίτο 7 και γενικά κάθε δέμα να περιέχει 2 αντικείμενα περισσότερα από το προηγούμενο του .

i) Να βρείτε πόσα δέματα θα φτιάξουμε

ii) Αν η συσκευασία του πρώτου δέματος κοστίζει 0,50 € , του δεύτερου 0,70 € , του τρίτου 0, 90 € και γενικά η συσκευασία κάθε δέματος κοστίζει 0,20 € περισσότερο από την συσκευασία του αμέσως προηγούμενου δέματος , να βρείτε πόσο θα κοστίσει η συσκευασία του δέματος με τα περισσότερα αντικείμενα

Προτεινόμενη λύση

i)

Το πλήθος των δεμάτων είναι ίσο με το πλήθος των πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ διαφορά $\omega = 2$ και άθροισμα πρώτων όρων 9999 .

Αν ν είναι το πλήθος των όρων τότε από τον τύπο

$$S_\nu = \frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$$

κάνοντας αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

$$9999 = \frac{[2 \cdot 3 + (\nu - 1) \cdot 2]\nu}{2} \Leftrightarrow$$

$$9999 = (3 + \nu - 1)\nu \Leftrightarrow \nu^2 + 2\nu - 9999 = 0 \Leftrightarrow \nu = 99 \text{ ή } \nu = -101 \text{ απορίπτεται}$$

Άρα θα φτιάξουμε 99 δέματα

ii)

Το κόστος της συσκευασίας κάθε δέματος είναι ίσο με τον αντίστοιχο όρο της αριθμητικής προόδου με πρώτον όρο $\beta_1 = 0{,}50$ και διαφορά $\omega' = 0{,}20$

το δέμα με τα ποιο πολλά αντικείμενα είναι προφανώς το $99^{\text{ο}}$

οπότε από τον τύπο $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega'$

κάνοντας αντικατάσταση των δεδομένων βρίσκουμε

$\beta_{99} = 0{,}50 + 98 \cdot 0{,}20 = 0{,}50 + 19{,}60 = 20{,}10$

επομένως η συσκευασία του δέματος με τα ποιο πολλά αντικείμενα κοστίζει 20,10 €

36 .

Έχουμε 30 σφαίρες σ' ένα δοχείο αριθμημένες από το 1 έως το 30 . Επιλέγουμε μία σφαίρα στην τύχη .

Έστω τα ενδεχόμενα

Α : ο αριθμός της σφαίρας είναι άρτιος

Β : ο αριθμός της σφαίρας είναι πολλαπλάσιο του 5 .

Να βρείτε τις πιθανότητες

i) $P(A)$, $P(B)$

ii) $P(A\cup B)$, $P(A\cup B')$, $P[(B\cap A')\cup(A\cap B')]$

iii) Να βρείτε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού της οποίας ρίζες είναι οι αριθμοί $P(A\cup B)$ και $P(A\cap B)$

Προτεινόμενη λύση

$A=\{2,\ 4,\ 6,\dots,\ 28,\ 30\}$ με $N(A)=15$

$B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$ με $N(B)=6$

$A\cap B=\{10,\ 20,\ 30\}$ με $N(A\cap B)=3$

i)

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

ii)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$$

$$=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=$$

$$=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$P[(B\cap A')\cup(A\cap B')]=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{2}{10}=\frac{1}{2}$$

iii)

Επειδή $S = P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$ και

$P = P(A \cup B) \cdot P(A \cap B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{100}$ η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{10}x + \frac{6}{100} = 0$.

37.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^4+2x^2+1}=2x+3+x^2$

ii) $||2x-3|-4|=5$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^4+2x^2+1}=2x+3+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x^2+1)^2}=2x+3+x^2 \Leftrightarrow$$

$|x-2| + |x^2+1| = 2x + 3 + x^2$ και επειδή $x^2 + 1>0$

$$|x-2| + x^2 + 1 = 2x + 3 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$|x-2| = 2x + 2 \ \textbf{(1)}$$

Αν $2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ η **(1)** $\Leftrightarrow$

$(x-2 = 2x + 2$ ή $x-2 = -2x - 2) \Leftrightarrow$

$x = -4$ που απορρίπτεται ή $x = 0$

ii)

$||2x-3|-4| = 5 \Leftrightarrow |2x-3|-4 = 5$ ή $|2x-3| -4 = -5 \Leftrightarrow$

$|2x-3| = 9$ ή $|2x-3| = -1$

Οπότε

$|2x-3| = 9 \Leftrightarrow (2x-3 = 9$ ή $2x-3 = -9) \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = -3$

ή

$|2x-3| = -1$ η οποία είναι αδύνατη

38.

Έστω η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x - \lambda^2 - 5 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες να είναι αντίθετες

iii) Να βρείτε το λ ώστε μεταξύ των ριζών x_1 , x_2 να ισχύει η σχέση

$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1 + x_2 = -\lambda^3 - 9$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\Delta = (\lambda + 1)^2 - 4(-\lambda^2 - 5) = 5\lambda^2 + 2\lambda + 21$

Επειδή η διακρίνουσα Δ΄ του τριωνύμου Δ είναι $\Delta' = -416 < 0$ το Δ θα είναι ομόσημο του 5 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ επομένως $\Delta > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii)

Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες θα πρέπει να ισχύει

$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

iii)

$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1 + x_2 = -\lambda^3 - 9 \quad \Leftrightarrow$

$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2) = -\lambda^3 - 9$

και επειδή $x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = -\lambda^2 - 5$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda + 1$ έχουμε

$(\lambda + 1)(-\lambda^2 - 5) + \lambda + 1 = -\lambda^3 - 9 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -5$

39.

Αν η ευθεία ε_1 : $y = (2\lambda - 1)x + k$ είναι παράλληλη στην $y = 5x + 6$ και διέρχεται από το σημείο A(1, 4) να βρείτε

i) Τις τιμές των λ και k

ii) Για $\lambda = 3$ και $k = -1$

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία ε_1 τέμνει τους άξονες και το είδος της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα των x

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (5k-1)x + 2\lambda - \mu^2 = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού οι δύο ευθείες είναι παράλληλες θα έχουμε

$2\lambda - 1 = 5 \Leftrightarrow \lambda = 3$

επομένως η εξίσωση γίνεται $y = 5x + k$

επειδή όμως η ε_1 διέρχεται από το σημείο A(1, 4) θα πρέπει οι συντεταγμένες του Α να επαληθεύουν την εξίσωση , άρα πρέπει

$4 = 5 \cdot 1 + k \Leftrightarrow k = -1$

ii)

α) Για $\lambda = 3$ και $k = -1$ η εξίσωση της ε_1 γίνεται $y = 5x - 1$

Για $x = 0$ έχουμε $y = -1$ άρα σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το $(0, -1)$

Για $y = 0$ έχουμε $x = \frac{1}{5}$ άρα σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\alpha = 5 > 0$ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x είναι οξεία

β) Για $\lambda = 3$ και $k = -1$ η εξίσωση $x^2 - (5k-1)x + 2\lambda - \mu^2 = 0$ γίνεται

$$x^2 + 6x + 6 - \mu^2 = 0$$

με διακρίνουσα $\Delta = 12 + 4\mu^2 > 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

40.

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $(x^2-7x+12)(x^2-4x+4)(x^2+x+5) \le 0$

ii) $\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-5x+3} \ge 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή $x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=4$

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$ διπλή

ενώ η $x^2+x+5=0$ είναι αδύνατη

Το πρόσημο του κάθε παράγοντα ξεχωριστά φαίνεται στους παρακάτω πίνακες

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
Πρόσημο του $x^2-7x+12$		+	0	–	0	+	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Πρόσημο του x^2-4x+4		+	0	+	

x	$-\infty$		$+\infty$
Πρόσημο του x^2+x+5		+	

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω συμπεράσματα σε έναν πίνακα έχουμε

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		+	|	+	0	–	0	+	
x^2-4x+4		+	0	+	|	+	|	+	
x^2+x+5		+	|	+	|	+	|	+	
Γινόμενο		+	0	+	0	–	0	+	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν

$3 \le x \le 4$ ή $x=2$

ii)

Κατ’ αρχήν πρέπει $2x^2 - 5x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq \frac{3}{2}$

με αυτούς τους περιορισμούς η δοσμένη ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$(4x^2 - 5x + 1)(2x^2 - 5x + 3) \geq 0$

Δουλεύοντας όπως στο **(i)** έχουμε τον πίνακα

x	$-\infty$ $\qquad \frac{1}{4} \qquad 1 \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$
$4x^2 - 5x + 1$	+ 0 − 0 + | +
$2x^2 - 5x + 3$	+ | + 0 − 0 +
Γινόμενο	+ 0 − 0 − 0 +

Από τον πίνακα και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς βλέπουμε ότι η ανίσωση

αληθεύει όταν $x \leq \frac{1}{4}$ ή $x > \frac{3}{2}$